Derivada Direcional: Aplicações

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Paulista - Unip, Campus Swift Campinas

16 de abril de 2020

Taxa de variação em uma direção

1. O vetor gradiente $\nabla f(x, y)$ fornece a direção de maior crescimento da função $f(x, y)$;
2. O valor máximo da taxa de variação é dado pela norma do vetor gradiente, isto é, $||\nabla f(x, y)||$;
3. A derivada direcional fornece a velocidade da variação da função $f(x, y)$ na direção de algum vetor unitário.

Exemplo:

Determine a direção de maior taxa de variação da função

$$f(x, y) = sen(xy) + y^2,$$

no ponto $(0, 2)$.

Exemplo:

Determine a direção de maior taxa de variação da função

$$f(x,y) = sen(xy) + y^2,$$

no ponto $(0,2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ycos(xy) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xcos(xy) + 2y$$

Exemplo:

Determine a direção de maior taxa de variação da função

$$f(x,y) = sen(xy) + y^2,$$

no ponto $(0,2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ycos(xy) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xcos(xy) + 2y$$

Logo,

$$\nabla f(x,y) = (ycos(xy))\overrightarrow{i} + (xcos(xy) + 2y)\overrightarrow{j}$$

Exemplo:

Determine a direção de maior taxa de variação da função

$$f(x,y) = sen(xy) + y^2,$$

no ponto $(0,2)$.

Exemplo:

Determine a direção de maior taxa de variação da função

$$f(x,y) = sen(xy) + y^2,$$

no ponto $(0,2)$.

Portanto,

$$\nabla f(x,y) \quad = \quad (ycos(xy))\overrightarrow{i} + (xcos(xy) + 2y)\overrightarrow{j}$$

Exemplo:

Determine a direção de maior taxa de variação da função

$$f(x,y) = sen(xy) + y^2,$$

no ponto $(0,2)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (ycos(xy))\overrightarrow{i} + (xcos(xy) + 2y)\overrightarrow{j} \\ \nabla f(0,2) &= (2cos(0.2))\overrightarrow{i} + (0.cos(0.2) + 2(2))\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

Exemplo:

Determine a direção de maior taxa de variação da função

$$f(x, y) = sen(xy) + y^2,$$

no ponto $(0, 2)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\nabla f(x, y) &= (ycos(xy))\overrightarrow{i} + (xcos(xy) + 2y)\overrightarrow{j} \\
\nabla f(0, 2) &= (2cos(0.2))\overrightarrow{i} + (0.cos(0.2) + 2(2))\overrightarrow{j} \\
&= (2.1)\overrightarrow{i} + (0 + 4)\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

Exemplo:

Determine a direção de maior taxa de variação da função

$$f(x,y) = sen(xy) + y^2,$$

no ponto $(0,2)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= (ycos(xy))\overrightarrow{i} + (xcos(xy) + 2y)\overrightarrow{j} \\
\nabla f(0,2) &= (2cos(0.2))\overrightarrow{i} + (0.cos(0.2) + 2(2))\overrightarrow{j} \\
&= (2.1)\overrightarrow{i} + (0+4)\overrightarrow{j} \\
&= 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

Exemplo:

Determine a direção de maior taxa de variação da função

$$f(x,y) = sen(xy) + y^2,$$

no ponto $(0,2)$.

Assim, a direção de maior taxa de variação da função é dada na direção do vetor

$$\nabla f(0,2) = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$$

Exemplo:

Determine a taxa máxima de variação da função

$$f(x,y) = sen(xy) + y^2,$$

no ponto $(0,2)$.

Exemplo:

Determine a taxa máxima de variação da função

$$f(x, y) = sen(xy) + y^2,$$

no ponto $(0, 2)$.

$$\nabla f(x, y) = (ycos(xy))\overrightarrow{i} + (xcos(xy) + 2y)\overrightarrow{j}$$

Exemplo:

Determine a taxa máxima de variação da função

$$f(x,y) = sen(xy) + y^2,$$

no ponto $(0,2)$.

$$\nabla f(x,y) = (ycos(xy))\overrightarrow{i} + (xcos(xy) + 2y)\overrightarrow{j}$$

$$\nabla f(0,2) = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$$

Exemplo:

$$||\nabla f(0,2)|| = \sqrt{2^2 + 4^2}$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
||\nabla f(0,2)|| &= \sqrt{2^2+4^2} \\
&= \sqrt{4+16}
\end{aligned}
$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} ||\nabla f(0,2)|| &= \sqrt{2^2+4^2} \\ &= \sqrt{4+16} \\ &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
||\nabla f(0,2)|| &= \sqrt{2^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{4 + 16} \\
&= \sqrt{20} \\
&= 2\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
||\nabla f(0,2)|| &= \sqrt{2^2+4^2} \\
&= \sqrt{4+16} \\
&= \sqrt{20} \\
&= 2\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Portanto, a taxa máxima de varição no ponto $(0,2)$ é $2\sqrt{5}$.

Aplicação

Suponha que a seguinte função descreva a temperatura (em graus Celsius) de uma superfície, em cada ponto (x, y), sendo que cada coordenada x e y são medidos em metros.

$$T(x, y) = 6y^2 + 2x^2$$

a) Partindo do ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 4)$, qual a direção de maior crescimento de temperatura nessa superfície?

b) Qual a taxa máxima de crescimento de temperatura nessa superfície?

Aplicação

a) Partindo do ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 4)$, qual a direção de maior crescimento de temperatura nessa superfície?

Aplicação

a) Partindo do ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 4)$, qual a direção de maior crescimento de temperatura nessa superfície?

$$T(x, y) = 6y^2 + 2x^2$$

Aplicação

a) Partindo do ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 4)$, qual a direção de maior crescimento de temperatura nessa superfície?

$$T(x,y) = 6y^2 + 2x^2$$

Logo,

$$\nabla f(x,y) \;=\; 4x\overrightarrow{i} + 12y\overrightarrow{j}$$

Aplicação

a) Partindo do ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 4)$, qual a direção de maior crescimento de temperatura nessa superfície?

$$T(x, y) = 6y^2 + 2x^2$$

Logo,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= 4x\vec{i} + 12y\vec{j} \\ \nabla f\left(\frac{1}{2}, 4\right) &= 4\left(\frac{1}{2}\right)\vec{i} + 12(4)\vec{j} \end{aligned}$$

Aplicação

a) Partindo do ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 4)$, qual a direção de maior crescimento de temperatura nessa superfície?

$$T(x,y) = 6y^2 + 2x^2$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= 4x\overrightarrow{i} + 12y\overrightarrow{j} \\
\nabla f\left(\frac{1}{2}, 4\right) &= 4\left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{i} + 12(4)\overrightarrow{j} \\
\nabla f\left(\frac{1}{2}, 4\right) &= 2\overrightarrow{i} + 48\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

Aplicação

a) Partindo do ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 4)$, qual a direção de maior crescimento de temperatura nessa superfície?

$$T(x,y) = 6y^2 + 2x^2$$

Logo,

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= 4x\overrightarrow{i} + 12y\overrightarrow{j} \\ \nabla f\left(\frac{1}{2},4\right) &= 4\left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{i} + 12(4)\overrightarrow{j} \\ \nabla f\left(\frac{1}{2},4\right) &= 2\overrightarrow{i} + 48\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

Portanto, a direção de maior crescimento de temperatura é dada por $\nabla f\left(\frac{1}{2},4\right) = 2\overrightarrow{i} + 48\overrightarrow{j}$.

Aplicação

b) Qual a taxa máxima de crescimento de temperatura nessa superfície?

Aplicação

b) Qual a taxa máxima de crescimento de temperatura nessa superfície?

$$\nabla f\left(\frac{1}{2}, 4\right) = 2\overrightarrow{i} + 48\overrightarrow{j}$$

Aplicação

b) Qual a taxa máxima de crescimento de temperatura nessa superfície?

$$\nabla f\left(\frac{1}{2},4\right)=2\,\overrightarrow{i}+48\,\overrightarrow{j}$$

Logo,

$$||\nabla f\left(\frac{1}{2},4\right)|| \quad = \quad \sqrt{2^2+48^2}$$

Aplicação

b) Qual a taxa máxima de crescimento de temperatura nessa superfície?

$$\nabla f\left(\frac{1}{2}, 4\right) = 2\overrightarrow{i} + 48\overrightarrow{j}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left|\left|\nabla f\left(\frac{1}{2}, 4\right)\right|\right| &= \sqrt{2^2 + 48^2} \\ &= \sqrt{4 + 2304} \end{aligned}$$

Aplicação

b) Qual a taxa máxima de crescimento de temperatura nessa superfície?

$$\nabla f\left(\frac{1}{2},4\right)=2\overrightarrow{i}+48\overrightarrow{j}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left|\left|\nabla f\left(\frac{1}{2},4\right)\right|\right| &= \sqrt{2^2+48^2} \\ &= \sqrt{4+2304} \\ &= \sqrt{2308} \end{aligned}$$

Aplicação

b) Qual a taxa máxima de crescimento de temperatura nessa superfície?

$$\nabla f\left(\frac{1}{2},4\right) = 2\overrightarrow{i} + 48\overrightarrow{j}$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||\nabla f\left(\frac{1}{2},4\right)|| &= \sqrt{2^2+48^2} \\ &= \sqrt{4+2304} \\ &= \sqrt{2308} \\ &\approx 48^o C/m \end{aligned}$$

Aplicação

b) Qual a taxa máxima de crescimento de temperatura nessa superfície?

$$\nabla f\left(\frac{1}{2},4\right)=2\overrightarrow{i}+48\overrightarrow{j}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
||\nabla f\left(\frac{1}{2},4\right)|| &= \sqrt{2^2+48^2} \\
&= \sqrt{4+2304} \\
&= \sqrt{2308} \\
&\approx 48^o C/m
\end{aligned}$$

Portanto, a taxa máxima de crescimento de temperatura é $48^o C/m$.

Aplicação

Considere a seguinte função:

$$f(x,y) = 60 + \left(\frac{x}{20}\right)^2 + \left(\frac{y}{25}\right)^2$$

A função f descreve a temperatura em graus Celsius (C) no ponto (x, y), em que as distâncias são medidas em quilômetros.

Com que velocidade varia a temperatura desse campo na seguinte direção $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{j}$?

Aplicação

Se $f(x, y) = 60 + \left(\frac{x}{20}\right)^2 + \left(\frac{y}{25}\right)^2$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{400} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{625}$$

Aplicação

Se $f(x,y) = 60 + \left(\frac{x}{20}\right)^2 + \left(\frac{y}{25}\right)^2$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{400} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{625}$$

Logo,

$$\nabla f(x,y) = \frac{2x}{400}\vec{i} + \frac{2y}{625}\vec{j}$$

Aplicação

Portanto,

$$D_{\overrightarrow{u}} f(x,y) = \left(\frac{2x}{400}\overrightarrow{i} + \frac{2y}{625}\overrightarrow{j}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}\right)$$

Aplicação

Portanto,

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{u}} f(x,y) &= \left(\frac{2x}{400}\vec{i} + \frac{2y}{625}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) \\
&= \left(\frac{2x}{400}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{2y}{625}\right)\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Aplicação

Portanto,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(x,y) &= \left(\frac{2x}{400}\vec{i} + \frac{2y}{625}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) \\ &= \left(\frac{2x}{400}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{2y}{625}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2x\sqrt{3}}{800} + \frac{2y}{1250} \end{aligned}$$

Aplicação

Portanto,

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{u}}f(x,y) &= \left(\frac{2x}{400}\vec{i} + \frac{2y}{625}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) \\
&= \left(\frac{2x}{400}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{2y}{625}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2x\sqrt{3}}{800} + \frac{2y}{1250}
\end{aligned}
$$

Logo, a velocidade de variação de temperatura é dada por $D_{\vec{u}}f(x,y) = \frac{2x\sqrt{3}}{800} + \frac{2y}{1250}$.

Exercícios propostos

Exercício 7, página 68 da apostila Unip

Exercício 8, página 68 da apostila Unip

Exercício 10, página 68 da apostila Unip

Exercício 11, página 68 da apostila Unip

Exercício 6, página 71 da apostila Unip

- Os exercícios em preto são para praticar.
- Os exercícios em vermelho são para entregar.

Obrigado pela atenção!

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: vinicius.wasques@docente.unip.br

Departamento de Engenharia, Ciência da Computação e Sistemas de Informação

site: `https://viniciuswasques.github.io/home/`